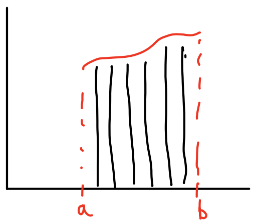
INTEGRALI DOPPI ALLA RIEMANN

CON $\mathbb{R}^1$

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$

ALTEZZA : TRAPEZOIDE , BASE = INTERVALLO a, b



SOMMA DI RIEMANN

$$S_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta x_i$$ → SOMMA DELLE AREE DEI RETTANGOLINI

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$$

$x_0 = a$

$x_1 = a + \frac{b-a}{n}$

$x_2 = a + 2\,\frac{b-a}{n}$

$\vdots$

$x_n = b$

n INTERVALLINI

$[x_i, \dots x_{\dots}]$ $i = 0, \dots n-1$

- f È INTEGRABILE ALLA RIEMANN:
  SE $n \to +\infty$

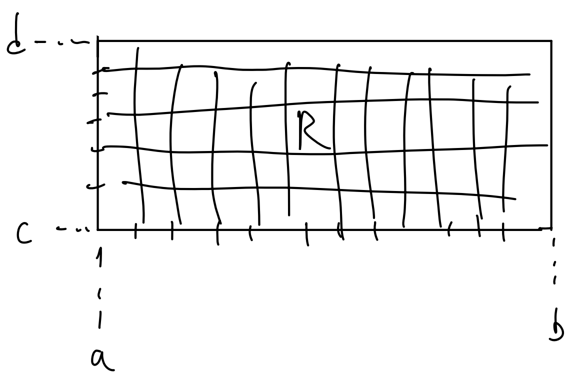
$$S_n(f) \to I \in \mathbb{R}$$ INDIPENDENTEMENTE DALLA SCELTA DEI PUNTI p_i

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$ → AREA TRAPEZOIDE

CON $\mathbb{R}^2$

RETTANG.

$R = [a, b] \times [c, d]$



$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\, i \qquad i = 1 \dots n$$

$$y_j = c + \frac{d-c}{m}\, j \qquad j = 1 \dots m$$

$$S_{m,n}(f) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \Delta x_i\, \Delta y_j \cdot f(x_i^*, y_j^*) \xrightarrow{m,n \to +\infty} I \in \mathbb{R}$$

ALLORA f AMMETTE L'INTEGRALE DOPPIO

$$I = \int_R f(x, y)\, dx\, dy$$

QUANDO f È CONTINUA ⇒ f È R-INTEGRABILE

$f : R \to \mathbb{R}$ f CONTINUA

COME CALCOLARE $\int_R f(x,y)\,dx\,dy$?

$f(x,y)$

FISSIAMO LA y E CONSIDERIAMO LA f COME A 1 VARIABILE x

$x \to f(x,y)$ È ANCORA CONTINUA $\to$ È INTEGRABILE

$$A(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

- $\boxed{\text{FUBINI}}$

$$I = \int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy$$

$$\parallel$$

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

ESEMPIO

$f(x,y) = 16 - x^2 - 2y^2 \qquad D = [0,2] \times [0,2]$

$$\int_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dx\,dy =$$

$$\int_0^2 \left[\int_0^2 16 - x^2 - 2y^2\,dx\right] dy$$

$$\int (16 - x^2 - 2y^2)\,dx = \underbrace{\int 16 - 2y^2\,dx}_{(16-2y^2)\,x} - \underbrace{\int x^2\,dx}_{\frac{1}{3}x^3}\Big|_0^2$$

PER $x = 2$ —
$x = 0$

$$= \left[(16 - 2y^2)\,2 - \frac{8}{3}\right] - [0]$$

$$= 32 - \frac{8}{3} - 4y^2 = \boxed{\frac{88}{3} - 4y^2}$$

$$\int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \frac{88}{3}\cdot 2 - 4\int_0^2 y^2 = \frac{176}{3} - 4\,\frac{1}{3}\,y^3 \Big|_0^2$$

$$= \frac{176}{3} - \frac{32}{3} = 48$$

ESEMPIO

$$\iint_R y e^{xy}\, dx\, dy \qquad R = [0,1] \times [0,2]$$

$$\int_0^2 \left[\int_0^1 y e^{xy}\, dx \right] dy$$

$$\int_0^1 y e^{xy}\, dx = e^{xy} \Big|_0^1 \quad \text{NELLA VAR. } x$$

$$= e^y - 1$$

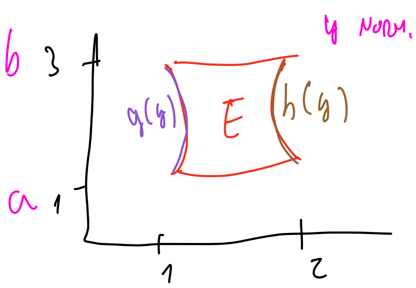
$$\int_0^2 e^y - 1\, dy = e^y \Big|_0^2 = e^2 - 3$$

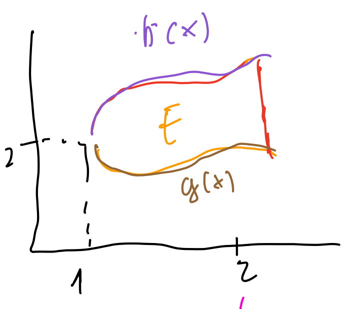
• COSA SUCCEDE SE D_f NON È PIÙ UN RETTANGOLO?

• DEF. $E \subset \mathbb{R}^2$ E SI DICE x-NORMALE SE $E = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq h(x)\ \forall x \in [a,b] \}$

DOVE $g, h : [a,b] \to \mathbb{R}$ SONO FUNZIONI CONTINUE

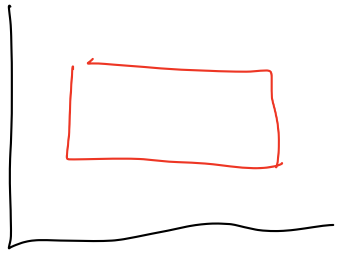
$\to$ STESSA COSA PER y, CAMBIO INTERV. DA $[a,b]$ A $[c,d]$





x NORM.

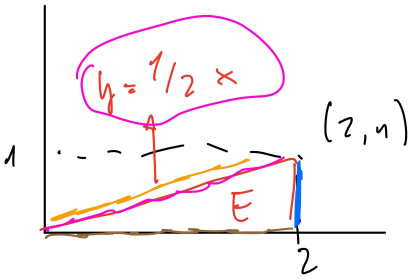
a b



→ SIA X NORM, CHE Y NORM.

$E \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE **NORMALE** SE È X-NORM. OPPURE Y-NORM.

$E \subset \mathbb{R}^2$ SI DICE **REGOLARE** SE È UNIONE FINITA DI INSIEMI NORMALI SENZA PUNTI INTERNI IN COMUNE A DUE A DUE



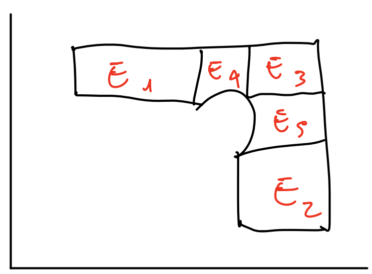
È x-NORM.?

$[a,b] = [0,2]$

- $g(x) = 0$
- $h(x) = 1/2\, x$

È y-NORM $[c,d] = [0,1]$

- $g(y) = 2y$
- $h(y) = 2$



E_4 x-NORM.

E_5 y-NORM.

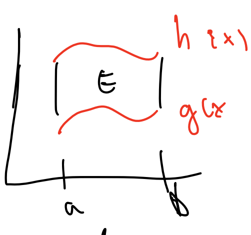
E È REGOLARE

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dx = \sum_1^n \iint_{E_i} f(x,y)\,dx\,dy$$

→ COME FACCIO A CALCOLARE L'INTEGRALE DOPPIO SU UN DOMINIO NORMALE

- TH. (f cont.)

→ 1) x-NORM.



$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$\hookrightarrow$ 2) y - NORM.

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$